Cercle trigonométrique, angles, radians, sinus, cosinus

Je vous invite à nouveau dans le monde des mathématiques et plus précisément à un voyage à l'intérieur du cercle trigonométrique. C'est la deuxième œuvre sur laquelle j'aborde ce thème, et j'adresse tous mes remerciements à Alain Gau enseignant en mathématiques, pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée dans la rédaction du texte d'explications, notamment pour les formules appropriées.

Voici quelques repères pour la bonne compréhension de l'œuvre, vous trouverez les angles et valeurs indiqués sur les lignes droites jaunes et représentés dans les 24 petits cercles constituant la première boucle en forme de cercle tournant autour du centre de l'œuvre ainsi que dans les autres petits cercles un peu plus gros associés à la deuxième boucle tout au bord de l'œuvre.

Le cercle trigonométrique est un cercle dont le rayon est égal à 1 et qui est centré sur l'origine du repère, dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé.
Radian : la valeur de l'angle en radians est le rapport entre la longueur L de l'arc de cercle intercepté par les droites et le rayon r. Un angle d'un radian intercepte sur la circonférence du cercle un arc d'une longueur égale au rayon.
Le rayon horizontal ou axe des abscisses, gradué de 0 au centre à 1 sur le cercle , est l'axe de lecture des cosinus.
Le rayon vertical ou axe des ordonnées, gradué de 0 au centre à 1 sur le cercle est l'axe des sinus.

Pénétrons à l'intérieur de cette œuvre et sur le fond présentant un éventail de couleurs, nous commençons, en partant du point central jaune, nous commençons notre parcours à droite en suivant la ligne horizontale jaune avec un angle 0 noté sur fond bleu marine.
En partant de cette droite, nous imaginons que nous traçons un angle dans la partie supérieure du cercle de centre le point central jaune jusqu'à la droite horizontale jaune à l'opposé dans la partie gauche ; l'angle ainsi formé correspond à 180°, soit un demi-tour, et il a aussi pour valeur π radians. Continuons notre parcours autour du centre dans la partie inférieure du cercle et rejoignons la ligne horizontale à droite sur fond bleu marine notée 0 (1,0) : nous venons de faire un tour complet qui correspond à 2π radians soit 360°.

CENTRE DE L'ŒUVRE ET PREMIERE SÉRIE DE PETITS CERCLES :

Retournons au centre de l'œuvre et à droite, à l'intérieur du premier cercle délimité par les petits ronds entourés d'un cercle en coloris jaune et symbolisant les différents angles.
En partant à droite de la ligne horizontale jaune indiquant un angle de 0° et en nous dirigeant toujours dans la partie supérieure de l'œuvre, nous croisons une première ligne jaune, puis au dessus, une ligne droite verte jusqu'au petit cercle vert à l'intérieur duquel figure un angle de 15° en coloris rose.
Nous remontons, après avoir croisé une autre ligne droite jaune, nous arrivons à la ligne jaune sur laquelle, autour du point central, est noté l'angle de 30° correspondant à la valeur $\frac{\pi}{6}$, soit un angle de 30° qui apparaît en coloris rouge à l'intérieur du petit cercle ; le cosinus vaut
$\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus vaut $\frac{1}{2}$.

Continuons à remonter à droite et nous arrivons sur la ligne droite suivante où, à partir du point central, est noté l'angle de 45° correspondant à la valeur $\frac{\pi}{4}$, soit 180° divisé par 4, soit un angle de 45° en coloris rose dans le petit cercle ; le cosinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le sinus vaut également $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Nous croisons ensuite une autre ligne jaune et arrivons sur fond bleu à la ligne droite jaune où, à partir du point central, est noté l'angle de 60° correspondant à la valeur $\frac{\pi}{3}$; poursuivons sur la ligne jaune, le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ et le sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, nous voici devant le petit cercle vert à l'intérieur duquel figure l'angle de 60° en coloris rouge.
Continuons à tourner et croisons la ligne droite en coloris vert clair au bout de laquelle apparaît le petit cercle en vert et bleu à l'intérieur duquel figure l'angle de 75° en coloris rose.
Nous arrivons ensuite à la ligne droite où, à partir du point central, est noté l'angle de 90° correspondant à la valeur $\frac{\pi}{2}$; le cosinus vaut O et le sinus vaut 1. Dans le petit cercle en bleu, l'angle de 90° apparaît en coloris rouge.
Nous continuons à tourner à gauche et croisons une ligne droite jaune, puis une autre en coloris vert clair au bout de laquelle figure le petit cercle bleu avec, à l'intérieur, l'angle de 105° en coloris rose.
Nous tournons et arrivons sur la ligne droite jaune avec, autour du point central, l'angle noté 120° correspondant à la valeur $\frac{2\pi}{3}$; son cosinus vaut – $\frac{1}{2}$ et son sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$; suivons la ligne jusqu'au petit cercle bleu à l'intérieur duquel figure l'angle de 120° en coloris rouge.
Commençons à redescendre sur la gauche, nous croisons une ligne jaune, puis une autre sur laquelle, autour du point central, est noté l'angle de 135° correspondant à la valeur $\frac{3\pi}{4}$; le cosinus vaut – $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le sinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$; nous voici devant le petit cercle bleu à l'intérieur duquel apparaît l'angle de 135° en coloris rose.
Nous redescendons sur la gauche, nous croisons une ligne droite jaune, puis une autre sur fond bleu avec, autour du point central, l'angle noté 150° correspondant à la valeur $\frac{5\pi}{6}$; le cosinus vaut – $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus vaut $\frac{1}{2}$. Nous arrivons devant le petit cercle vert clair à l'intérieur duquel apparaît l'angle de 150° en coloris rouge.
Nous poursuivons sur fond bleu, nous croisons une ligne droite jaune, puis une ligne droite vert clair au bout de laquelle apparaît, à l'intérieur du petit cercle vert, l'angle de 165° en coloris rose.
Continuons à descendre sur fond bleu foncé, croisons une ligne droite jaune, puis une deuxième sur laquelle est noté, autour du point central, l'angle de 180° correspondant à la valeur π ; le cosinus vaut –1 et le sinus vaut 0. Nous arrivons devant le petit cercle sur fond bleu à l'intérieur duquel apparaît l'angle de 180° en coloris rouge.
Nous venons juste d'effectuer un demi-tour.
Nous continuons à descendre à gauche sur fond violet et pourpre sous la valeur π (–1,0). Nous croisons une ligne droite jaune et arrivons à la ligne droite en coloris vert clair au bout de laquelle apparaît, à l'intérieur du petit cercle en bleu foncé, l'angle de 195° en coloris rose.
Nous descendons, croisons une ligne jaune, puis une deuxième sur laquelle est noté, autour du

point central, l'angle de 210° correspondant à la valeur $\frac{7\pi}{6}$, soit 7 fois un angle de 30°. Le cosinus vaut – $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus vaut – $\frac{1}{2}$. Nous arrivons sur fond bleu au petit cercle en bleu foncé à l'intérieur duquel apparaît l'angle de 210° en coloris rouge.
Nous descendons sur fond bleu, nous croisons une ligne droite jaune, puis une autre sur laquelle est noté, autour du point central, l'angle de 225° correspondant à la valeur $\frac{5\pi}{4}$, soit 5 fois un angle de 45°. Le cosinus vaut – $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le sinus vaut – $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous arrivons devant le petit cercle en vert clair à l'intérieur duquel apparaît l'angle de 225° en coloris rose.
Continuons à tourner sur fond bleu marine, nous croisons une ligne droite jaune, puis une deuxième ligne jaune sur laquelle, autour du point central, est noté l'angle de 240° correspondant à la valeur $\frac{4\pi}{3}$, soit 4 fois un angle de 60° ; toujours sur la ligne jaune le cosinus vaut – $\frac{1}{2}$ et le sinus vaut – $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nous arrivons devant le petit cercle vert à l'intérieur duquel figure l'angle de 240° en coloris rouge.
Nous poursuivons sur fond bleu, croisons une ligne jaune et arrivons à la droite en coloris vert clair au bout de laquelle apparaît le petit cercle vert à l'intérieur duquel figure l'angle de 255° en coloris rose.
En bas de l'œuvre nous continuons à tourner vers la droite sur fond bleu, croisons une ligne jaune, puis une autre sur laquelle est noté, autour du point central, l'angle de 270° correspondant à la valeur $\frac{3\pi}{2}$, soit 3 fois un angle de 90°. Suivons la ligne jaune, sur fond bleu/vert foncé est indiqué le cosinus qui vaut 0 et le sinus qui vaut –1. Nous arrivons devant le petit cercle bleu à l'intérieur duquel figure l'angle de 270° en coloris rouge.
Continuons sur fond vert foncé, croisons une ligne droite jaune, puis une ligne droite en coloris vert clair au bout de laquelle apparaît dans le petit cercle bleu l'angle de 285° en coloris rose.
Tournons sur la droite et sur fond vert, croisons une ligne droite jaune, puis une autre ligne sur laquelle est noté, autour du point central, l'angle de 300° correspondant à la valeur $\frac{5\pi}{3}$, soit 5 fois un angle de 60°. Le cosinus vaut $\frac{1}{2}$ et le sinus vaut – $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Nous arrivons devant le petit cercle bleu à l'intérieur duquel apparaît l'angle de 300° en coloris rouge.
Poursuivons en remontant à droite et sur fond bleu, croisons une ligne jaune, puis une autre ligne jaune sur laquelle est noté, autour du point central, l'angle de 315° correspondant à la valeur $\frac{7\pi}{4}$, soit 7 fois un angle de 45° ; le cosinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et le sinus vaut – $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Nous arrivons au petit cercle vert à l'intérieur duquel figure l'angle de 315° en coloris rose.
Continuons à remonter, croisons une ligne droite en vert clair et nous arrivons à la ligne droite jaune sur laquelle est noté, autour du point central, l'angle de 330° correspondant à la valeur $\frac{11\pi}{6}$, soit 11 fois un angle de 30°. Le cosinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et le sinus vaut – $\frac{1}{2}$. Nous arrivons devant le petit cercle avec un angle vert très étroit et à l'intérieur duquel l'angle de 330° occupe la majeure partie en coloris rouge ;
Remontons dans la partie pourpre, croisons une ligne jaune, puis une ligne droite en vert clair au bout de laquelle apparaît dans le petit cercle un angle bleu très étroit et l'angle de 345° qui occupe la majeure partie en coloris rose.
Nous croisons une ligne droite jaune et nous arrivons maintenant à la ligne jaune sur laquelle

est noté, autour du point central, l'angle de 360° correspondant à la valeur 2π, soit 2 fois un angle de 180°, mentionnée aussi la valeur 0 car nous venons de faire le tour du cercle trigonométrique ! Le cosinus vaut 1 et le sinus vaut 0. Nous arrivons devant le petit cercle divisé en deux parties égales : un angle de 180° en coloris rouge et un angle de 180° en coloris vert, soit un angle total de 360°.

2ème SÉRIE DE PETITS CERCLES AU BORD DE L'ŒUVRE :

Suivons cette ligne jaune à droite et au bord de l'œuvre nous arrivons à un autre petit cercle à l'intérieur duquel nous retrouvons sur fond rouge la valeur 0 pour le sinus et sur fond vert la valeur 1 pour le cosinus.
Nous remontons à droite toujours au bord de l'œuvre et arrivons au petit cercle sur fond vert à l'intérieur duquel figurent les sinus et cosinus des angles principaux sur fond rose et rouge : à l'intérieur du cercle à droite, à partir du point 0 central la ligne verticale jaune, partant de la ligne des abscisses, coupe le cercle en un angle de 30° : à partir de cet angle noté sur le cercle, nous suivons une ligne horizontale en tirés jaunes qui coupe la ligne verticale ou ligne des ordonnés juste au milieu : le sinus vaut donc $\frac{1}{2}$. Juste à côté et toujours à partir du point 0 central, une autre ligne droite verticale jaune coupe le cercle en un angle de 45° : en partant de cet angle sur le cercle nous suivons une autre ligne horizontale en tirés jaunes qui va couper la ligne verticale des ordonnées : le sinus de l'angle de 45° vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Toujours à côté et à partir du point 0 central une troisième ligne verticale jaune partant de la ligne des abscisses, coupe le cercle en un angle de 60° : à partir de ce point sur le cercle, une autre ligne horizontale en tirés jaunes va couper la ligne verticale des ordonnées : le sinus de l'angle de 60° vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
La ligne verticale jaune qui coupe le cercle en un angle de 60° coupe la ligne des abscisses juste au milieu : le cosinus de l'angle 60° vaut donc $\frac{1}{2}$.
La ligne verticale jaune qui coupe le cercle en un angle de 45° coupe la ligne des abscisses : le cosinus de l'angle 45° vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
La ligne verticale jaune qui coupe le cercle en un angle de 30° coupe la ligne des abscisses : le cosinus de l'angle 30° vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Continuons à remonter à droite et nous arrivons devant le petit cercle vert à l'intérieur duquel apparaît en rouge l'angle de 30° : son sinus indiqué sur la ligne des ordonnées vaut donc $\frac{1}{2}$ et son cosinus, indiqué sur la ligne des abscisses, vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La ligne verticale en tirés jaunes coupe la ligne des abscisses pour le cosinus et la ligne horizontale en tirés jaunes coupe la ligne des ordonnées pour le sinus.
Nous remontons, nous sommes en haut et au bord de l'œuvre à droite, et nous voici devant le petit cercle sur fond bleu et vert à l'intérieur duquel figure, en coloris rose, l'angle de 45°. La ligne horizontale en tirés jaunes coupe l'axe des ordonnées, le sinus vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$, la ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des abscisses, le cosinus vaut également $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Nous voici tout en haut et au bord de l'œuvre devant l'angle de 60° en coloris rouge à l'intérieur du petit cercle sur fond vert. La ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des

abscisses pour le cosinus qui vaut $\frac{1}{2}$; la ligne horizontale qui coupe l'axe des ordonnées n'est pas visible et le sinus vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Tout en haut de l'œuvre, nous traversons de droite à gauche et nous arrivons à l'angle de 120° en coloris rouge à l'intérieur du petit cercle bleu. La ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des abscisses dans la partie bleue, le cosinus vaut – $\frac{1}{2}$. Pour le sinus qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$, la ligne horizontale qui coupe l'axe des ordonnées n'est pas visible car nous sommes sur le bord de l'œuvre, tout en haut à gauche.

Nous redescendons sur le bord gauche et arrivons devant l'angle de 135° en coloris rose à l'intérieur du petit cercle bleu foncé. La ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des abscisses également en tirés jaunes pour le cosinus qui vaut – $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La ligne horizontale en tirés jaunes coupe l'axe des ordonnées sur fond rose pour le sinus qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nous continuons à redescendre à gauche et arrivons devant l'angle de 150° en coloris rouge à l'intérieur du petit cercle sur fond vert clair. La ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des abscisses sur fond vert pour le cosinus qui vaut – $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La ligne horizontale en tirés jaunes coupe l'axe des ordonnées sur fond rouge pour le sinus qui vaut $\frac{1}{2}$.

Continuons à redescendre, nous arrivons devant le petit cercle sur fond vert clair et vert foncé à l'intérieur duquel figure le cas de $\frac{1}{2}$ en coloris rose et rouge et noté à gauche du petit cercle.

Voyons le cas de $\frac{1}{2}$: dans un cercle de rayon unité, la verticale passant par le milieu de [OA] coupe le cercle en S ; cette ligne verticale se poursuit en tirés jaunes dans la partie vert clair, l'angle correspondant $\widehat{AOS}$ est de 60° ou $\frac{\pi}{3}$: le cosinus vaut $\frac{1}{2}$; l'horizontale passant par le milieu de [OB] coupe le cercle en T, cette ligne horizontale se poursuit en tirés jaunes sur fond vert foncé, l'angle correspondant $\widehat{AOT}$ mesure 30° ou $\frac{\pi}{6}$, son sinus vaut $\frac{1}{2}$.

On retient donc facilement cette relation : cosinus 60° = sinus 30° = $\frac{1}{2}$, en remarquant que 30° = 90° – 60°.

On retrouve ici la formule générale : cosinus (x) = sinus ($\frac{\pi}{2}$ – x).

On aurait de même : sinus (x) = cos ($\frac{\pi}{2}$ – x).

Nous descendons à gauche, nous voici devant l'angle de 180° ou π : tout au bord de l'œuvre dans le petit cercle bleu il apparaît en coloris rouge, son sinus vaut 0 et son cosinus vaut –1.

Continuons à descendre, nous arrivons devant le petit cercle à l'intérieur duquel sont représentés les angles associés supplémentaires en coloris rose et rouge : soit un angle « x » à droite sur fond rouge et un angle « π–x » à gauche sur fond rose, son angle supplémentaire. Le cosinus d'un angle a donc une valeur opposée à celle du cosinus de son angle supplémentaire. Le sinus d'un angle a donc même valeur que celle du sinus de son angle supplémentaire.

On a ainsi les formules : cosinus (x) = – cosinus (π – x) et sinus (x) = sinus (π – x).

Nous descendons et arrivons en bas à gauche sur fond bleu où figure, dans le petit cercle bleu foncé au bord de l'œuvre, l'angle de 210° en coloris rouge. La ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des abscisses sur fond rouge à gauche dans le cercle pour le cosinus qui vaut $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. La ligne horizontale en tirés jaunes coupe l'axe des ordonnées sur fond bleu marine en bas dans le cercle pour le sinus qui vaut $-\frac{1}{2}$.

Continuons à descendre en bas à gauche dans le petit cercle vert clair et vert foncé à l'intérieur duquel apparaissent les sinus et cosinus d'angles associés opposés. Le cosinus d'un angle a même valeur que le cosinus de son angle opposé. Le sinus d'un angle a une valeur opposée à celle du sinus de son angle opposé.

Nous voici tout en bas toujours en continuant sur la gauche et sur fond bleu marine. Les fonctions sur le cercle sont indiquées sur fond rose et rouge à l'intérieur du petit cercle vert clair et vert foncé ;

« $\mathcal{C}$ » est appelé cercle trigonométrique de centre O ; soit un repère orthonormé (O ; I ; J). À tout réel « x » correspond un point « M » tel que la longueur de l'arc « IM » soit égale à « x ». L'abscisse du point « M » dans le repère (O ; I ; J) est appelée le cosinus du nombre réel « x » et noté « cos x ». L'ordonnée du point « M » dans le repère (O ; I ; J) est appelée le sinus du nombre réel « x » et noté « sin x ». Le nombre réel « x » est la mesure en radians de l'angle orienté « $\widehat{IOM}$ ».

Tournons sur fond bleu et vert tout en bas de l'œuvre de gauche à droite, où nous retrouvons le même petit cercle sur fond bleu foncé avec, à l'intérieur, les mêmes valeurs d'angle mesuré en radians, en coloris rose et rouge.

Nous remontons en bas à droite sur fond bleu : nous voici devant le petit cercle sur fond vert à l'intérieur duquel l'angle de 315° occupe la majeure partie en coloris rose. La ligne verticale en tirés jaunes coupe l'axe des abscisses en ligne horizontale jaune pour le cosinus qui vaut $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La ligne horizontale en tirés jaunes coupe l'axe des ordonnées pour le sinus qui vaut $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nous remontons sur fond bleu en bas à droite et nous arrivons devant le petit cercle à l'intérieur duquel l'angle de 330° occupe la majeure partie en coloris rouge. La ligne verticale en tirés jaunes et traversant la petite partie verte, coupe l'axe des abscisses pour le cosinus qui vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. La ligne horizontale en tirés jaunes sur fond rouge coupe l'axe des ordonnées pour le sinus qui vaut $-\frac{1}{2}$.

Nous continuons à droite et arrivons dans la partie pourpre devant le petit cercle bleu et vert à l'intérieur duquel figurent les angles anti-complémentaires en coloris rose et rouge. Le sinus est donc égal à l'opposé du cosinus de l'angle anti-complémentaire, le cosinus est, lui, égal au sinus de son angle anti-complémentaire.

On a ainsi les formules : cosinus (x) = sinus (x + $\frac{\pi}{2}$) et sinus (x) = – cos (x + $\frac{\pi}{2}$).

Nous venons de terminer cette deuxième boucle de petits cercles au bord de l'œuvre.

Il reste quatre petits cercles aux quatre angles de l'œuvre :

Angle en haut à droite : à l'intérieur du petit cercle sur fond vert, figurent les angles associés

supplémentaires en coloris rose et rouge déjà expliqués en bas à gauche dans le petit cercle.
Angle en haut à gauche : à l'intérieur du petit cercle sur fond bleu, les angles associés opposés comprenant les sinus et cosinus sont en coloris rose et rouge.
Angle en bas à gauche : à l'intérieur du petit cercle figurent les angles anti-complémentaires en coloris rose et rouge, déjà présentés à droite et en bas de l'œuvre.
Angle en bas à droite : les angles associés complémentaires, à l'intérieur du petit cercle sur fond vert , sont représentés en coloris rose et rouge.
Le sinus d'un angle a donc la même valeur que le cosinus de son angle complémentaire. Le cosinus d'un angle a donc la même valeur que le sinus de son angle complémentaire.

Voilà un premier tour de ce cercle trigonométrique qui s'achève. J'espère que cette « promenade circulaire » vous a conduit dans une première approche et une meilleure compréhension des angles, radians, cosinus et sinus.